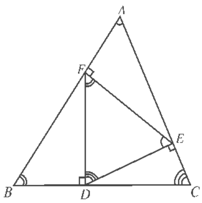
# 数学问题解答

## 2001 年 11 月号问题解答
## (解答由问题提供人给出)

**1341**　锐角三角形 $ABC$ 中有内接 $\triangle DEF$，且 $FD\perp BC$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$EF\perp AB$ 于 F，

求证：$S_{\triangle ABC}\geqslant 3S_{\triangle DEF}$.

(武汉华中理工大学西十四舍 5 号　黄元兵　430074)




**证**　$\triangle ABC$ 三边分别与 $\triangle DEF$ 三边垂直，又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，有

$\angle A=\angle DEF$，$\angle B=\angle EFD$，$\angle C=\angle FDE$ 即有 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

又公比 $q=\dfrac{BC}{DF}=\dfrac{BD}{DF}+\dfrac{CD}{DF}$

$$=\cot B+\frac{DE}{DF\sin C}$$

$$=\cot B+\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\cot B+\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}$$

$$=\cot B+\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin A\sin C}$$

$$=\cot A+\cot B+\cot C.$$

又由　$q=\cot A+\cot B+\cot C\geqslant\sqrt{3}$ 知

$$S_{\triangle ABC}=q^2S_{\triangle DEF}\geqslant 3S_{\triangle DEF},$$

当且仅当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时等号成立.

**1342**　在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ 求证：

$$\frac{a+b}{b+c-a}+\frac{b+c}{c+a-b}+\frac{c+a}{a+b-c}\geqslant 6.$$

(湖北黄石二中　杨志明　435000)

**证明**　因为 $a^2\geqslant a^2-(b-c)^2$

$$=(a+b-c)(a-b+c)$$

同理　$b^2\geqslant(b+c-a)(b-c+a)$

$$c^2\geqslant(c+a-b)(c-a+b)$$

三式同向相乘得

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

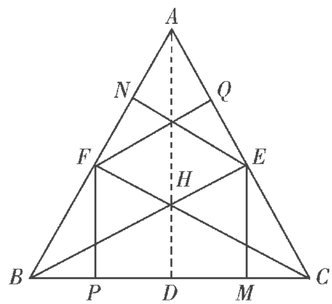
$$\frac{a+b}{b+c-a}+\frac{b+c}{c+a-b}+\frac{c+a}{a+b-c}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}}=6.$$

**1343**　$\triangle ABC$ 中，BE，CF 为 AC，AB 边上的高，$FP\perp BC$ 于 P，$FQ\perp AC$ 于 Q，$EM\perp BC$ 于 M，$EN\perp AB$ 于 N，且 $FP+FQ=CF$，$EM+EN=BE$，求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.

(厦门九中　陈四川　361004)




**证明**　$\dfrac{FP}{CF}+\dfrac{FQ}{CF}=1$，$\dfrac{EM}{BE}+\dfrac{EN}{BE}=1$，

作 $BC$ 边上的高 $AD$，则 $AD$，$BE$，$CF$ 共点于 $H$，$AD\parallel FP$，$\angle AHF=\angle CFP$，$Rt\triangle AFH\backsim Rt\triangle CPF$，$\dfrac{FH}{AH}=\dfrac{PF}{CF}$. 又 $HE\parallel FQ$，$\dfrac{HE}{CH}=\dfrac{FQ}{CF}$，所以 $\dfrac{FH}{AH}+\dfrac{HE}{CH}=1$，$\dfrac{FH}{AH}=\dfrac{CH-HE}{CH}$，$AH=\dfrac{CH\cdot FH}{CH-HE}$，

同理：$AH=\dfrac{BH\cdot HE}{BH-FH}$

所以 $\dfrac{CH\cdot FH}{CH-HE}=\dfrac{BH\cdot HE}{BH-FH}$.

又 $\angle BHF=\angle CHE$，$Rt\triangle BHF\backsim Rt\triangle CHE$，$\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{FH}{HE}$，$CH\cdot FH=BH\cdot HE$，所以 $CH-HE=BH-FH\cdot CH+FH=BH+HE$，所以 $CF=BE$，所以 $Rt\triangle ACF\cong Rt\triangle ABE$，$AC=AB$.

又 $\dfrac{FP}{FC}=\dfrac{BF}{BC}$，$\dfrac{FQ}{CF}=\dfrac{AF}{AC}$，所以 $\dfrac{FB}{BC}+\dfrac{AF}{AC}=1$，$\dfrac{FB}{BC}=\dfrac{AC-AF}{AC}=\dfrac{AB-AF}{AB}=\dfrac{FB}{AB}$，所以 $BC=AB$，即 $AB=BC=AC$，$\triangle ABC$ 为等边三角形.

**1344**　若 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$ 为满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ 的正数，求证对任何 $n\in N$ 有：

$$\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}\leqslant 1.\quad(1)$$

(南昌大学附中　宋庆　330029)

**证明**　$n=1$ 时，易知(1) 式成立.

下面，证明 $n\geqslant 2$ 时(1) 式成立.

因为 $\frac{1}{a_i+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_i}+n-1}$

$=\frac{1}{a_i+n-1}+\frac{a_i}{(n-1)a_i+1}$

$=\frac{a_i^2+2(n-1)a_i+1}{(n-1)a_i^2+(n^2-2n+2)a_i+n-1}$

$=\frac{2[a_i^2+2(n-1)a_i+1]}{n[a_i^2+2(n-1)a_i+1]+(n-2)(a_i-1)^2}$

$\leqslant\frac{2}{n}(i=1,2,\cdots,n)$

所以 $\frac{1}{a_i+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_i}+n-1}\leqslant\frac{2}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

以上 $n$ 式相加，便得

$$\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_1}+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_2}+n-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n-1}\leqslant 2.\quad(2)$$

假设对任意满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 的正数，成立 $\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}>1$，则对此式作变换：$a_1\to\frac{1}{a_1}$，$a_2\to\frac{1}{a_2}$，…，$a_n\to\frac{1}{a_n}$（在该变换下，条件不变），可得

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_2}+n-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n-1}>1,$$

将以上两个不等式相加，即得

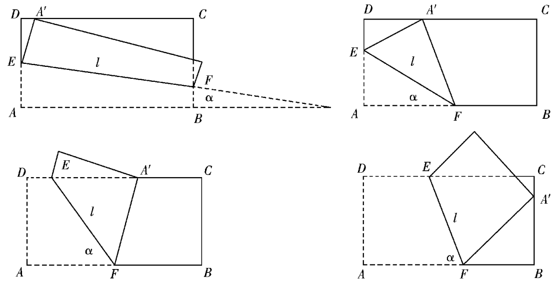
$$\frac{1}{a_1+n-1}+\frac{1}{a_2+n-1}+\cdots+\frac{1}{a_n+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_1}+n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_2}+n-1}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n-1}>2.$$

这与(2)式矛盾，故此时不等式(1)成立.

**1345**　折迭一张长方形纸片，使得它的一个顶点落在与该顶点不相邻的边上.如何折，方能使折缝最长？最短？

（合肥市旅游学校　朱长青　230011）

**解**　长方形纸片 $ABCD$，其边长为 $AB=CD=b$，$AD=BC=a$，$b\geqslant a$.由题意，我们可折 A 点到 DC 或 CB 边上，折合点 $A'$.折缝 EF 是 $AA'$ 垂直平分线与长方形 $ABCD$ 边的交点的连线.设折缝长 $l=|EF|$，$EF$ 与 $AB$ 的夹角为 $\alpha$，显然 $\angle DAA'=\alpha$，如图.




当 $A'$ 从 $D$ 点移向 $C$，再从 $C$ 点移向 $B$ 时，$\alpha$ 从零增加到 $\frac{\pi}{2}$，函数 $l=f(\alpha)$ 分为三段：当 $\alpha\in[0,\frac{1}{2}\arcsin\frac{a}{b})$ 时，$E$、$F$ 分别在 $AD$，$BC$ 边上，$l=\frac{b}{\cos\alpha}$（临界点为 $F$ 与 $B$ 重合，此时 $l=\frac{b}{\cos\alpha}=\frac{|AA'|}{2}(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$ 即 $\sin 2\alpha=\frac{a}{b}$）；② 当 $\alpha\in[\frac{1}{2}\arcsin\frac{a}{b},\frac{\pi}{4}]$ 时，E、F 分别在 $AD$、$AB$ 边上，$l=\frac{a}{2\sin\alpha\cos^2\alpha}$；③ 当 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时，E、F 分别在 DC、AB 边上，

$l=\frac{a}{\sin\alpha}$.故有：

$$l=\begin{cases}\frac{b}{\cos\alpha} & \alpha\in[0,\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a})\\ \frac{a}{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha} & \alpha\in[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a},\frac{\pi}{4}]\\ \frac{a}{\sin\alpha} & \alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha$ 单增，$\cos\alpha$ 单减；那么 $\frac{b}{\cos\alpha}$ 单增，$\frac{a}{\sin\alpha}$ 单减；于是 $l$ 的最大值只能发生在 $\alpha\in[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a},\frac{\pi}{4}]$.由于 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，根据算术平均不小于几何平均

$$\sin\alpha\cos^2\alpha=\sqrt{\frac{(2\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha)}{2}}\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

当且仅当 $2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$ 即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立（注意：当 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a}>\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，这个极大值不发生）.设

$z=\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\beta\cos^2\beta=\sin\alpha-\sin\beta-$

$(\sin^3\alpha-\sin^3\beta)$

$=(\sin\alpha-\sin\beta)(1-\sin^2\alpha-\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\beta)$

当$\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$z<0$，即 $\sin\alpha\cos^2\alpha$ 在区间$[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a},\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}]$单增；当 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$z>0$，即 $\sin\alpha\cos^2\alpha$ 在区间$[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{4}]$单减. 所以 l 在区间$[\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a},\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}]$单减，在区间$[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{4}]$单增.

综上所述，$l$ 的最大值只能发生在 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a}$ 处，比较大小可知：

当 $b>a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ 时，$l\max=\frac{\sqrt{2}}{2}b\cdot\sqrt{b^2-b\sqrt{b^2-a^2}}$，此时 $F$ 点与 $B$ 点重合，$\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{b}{a}$；当 $b\leqslant a\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ 时，$l\max=\sqrt{2}a$，此时 $E$ 点与 $D$ 点重合，$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

$l$ 的最小值只能发生在 $\alpha=0,\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{2}$ 处，比较大小可知：$l\min=a$，此时 $A'$ 点与 $B$ 点重合，$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

## 2001 年 12 月号数学问题

**（来稿请注明出处 —— 编者）**

**1346**　已知：点 $P$ 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 分别过A、$B$、$C$ 三点，且分别垂直于 $PA$、$PB$、$PC$，求证：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}\cdot\sin^2\alpha$.

（江西省宜丰县二中　龚浩生　336300）

**1347**　$P$ 在正$\triangle ABC$ 的内切圆内，则 P 到正三角形三边的距离必能构成三角形.

（山东枣庄孟庄峨山口中学　李成蛮　277100）

**1348**　证明：函数$f(x)=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x+a|-a}$是奇函数的充要条件是 $a>0$.

（江西南昌大学附中　宋庆　330029）

**1349**　单位圆内接正 $n$ 边形$(n\geqslant3)Z_1Z_2\cdots Z_n$，$P$ 为圆上任一点，求$|PZ_1|^2+|PZ_2|^2+\cdots+|PZ_n|^2$ 的值.

（山东省日照市三庄第二初级中学　惠智华　277100）

**1350**　若整数 $n$ 用 $p$ 进制表示为$(a_ma_{m-1}\cdots a_1a_o)_p$，其中 $p$ 为素数，则 $C_n^p\equiv a_1\pmod p$.

（江苏如皋市教师进修学校　徐道　226500）

**（上接 42 页）**

$=k!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!}\right]-(-1)^k$

$+kk!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!}\right]$

$=(k+1)k!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!}\right]+(-1)^{k+1}$

$=(k+1)!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(k)!}+(-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}\right]$

据归纳原理，对一切自然数 $n$，(1) 式都成立.

### 4　数列$\left\{\frac{f(n)}{n!}\right\}$的收敛性

由(1) 式得$\frac{f(n)}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$，可见$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$，这是一个莱布尼兹级数，它是收敛的，且$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{e}$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n!}=\frac{1}{e}=0.367879441171442\cdots\cdots$

计算出$\left\{\frac{f(n)}{n!}\right\}$前几项的近似值：0，0.5，0.3333333，0.375，0.3666667，0.3680556，0.3678571，0.367882，0.3678792，0.3678795，0.3678795，0.3678795，……

给出上述结果的一个概率描述：将编号为 1 至 $n$ 的 $n$ 个不同的元素作全排列，记 $A=\{$每个元素所处位置的序号都与它的编号不同$\}$，$\overline{A}=\{$至少有一个元素所处位置的序号与它的编号相同$\}$，则当 $n\geqslant10$ 时，事件 $A$ 发生的概率 $p(A)\approx0.3678795$，事件$\overline{A}$发生的概率$p(\overline{A})\approx0.6321205$，这两个数值的误差都小于 $10^{-7}$.